

Bestimmung der Rotationsdauer von Jupiter mit dem LHiRes III

27. Juni 2017

Die Umfangsgeschwindigkeit des Planeten Jupiter ist an seinem Äquator am größten und variiert aus der Sicht der Erde von $+v_0$ an einem Ende des Durchmessers zu $-v_0$ am anderen Ende. Wenn man den Äquator auf den Spalt eines Spektrographen abbildet, kann der Verlauf der Geschwindigkeitskomponente v_{\parallel} parallel zum Sehstrahl an allen sichtbaren Stellen des Äquators zugleich gemessen werden. Die verschiedenen Orte auf dem Äquator werden einfach auf verschiedene Zeilen des Spektrums abgebildet. In Dispersionsrichtung hat man also die Information über die Wellenlänge und senkrecht dazu die Information über den Ort auf dem Äquator. Die Absorptionslinien im Spektrum sind wegen des Dopplereffektes in jeder Zeile je nach dem Wert von v_{\parallel} verschoben. Insgesamt sind die Absorptionslinien geneigt und aus dieser Neigung wird die Rotationsdauer des Jupiter berechnet.

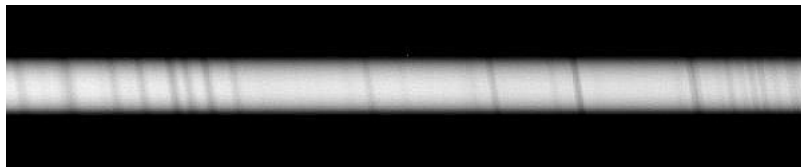


Abbildung 1: Die geneigten Absorptionslinien im Jupiterspektrum.

1 Theorie der Messungen

Aus der Bahngeschwindigkeit am Äquator v_0 und dem Äquatorradius des Planeten R_{J} ergibt sich sofort die Umlaufdauer T_{J} .

$$T_{\text{J}} = \frac{2\pi R_{\text{J}}}{v_0} \quad (1)$$

Die Werte für $R_{\gamma_{\perp}}$ und v_0 lassen sich wegen des unscharfen Randes nur schwer aus dem Spektrum entnehmen. Das ist auch gar nicht nötig, wie folgende die Überlegung zeigt.

1.1 Bestimmung der Radialgeschwindigkeit an einer beliebigen Stelle des Äquators

Wir betrachten die uns zugewandte Hälfte des Äquators vom Pol des Planeten Jupiter aus. Dabei ist $R_{\gamma_{\perp}}$ der Radius des Planeten und v_0 die Umfangsgeschwindigkeit am Äquator. Im Spektrographen misst man an jedem Punkt des Äquators die Komponente von v_0 , die parallel zur Sichtlinie ist, in der Zeichnung und im Text mit v_{\parallel} bezeichnet. Im Spektrum erscheint der Radius \overline{MP} als R_{\perp} , als Projektion des Radius senkrecht zur Sichtlinie.

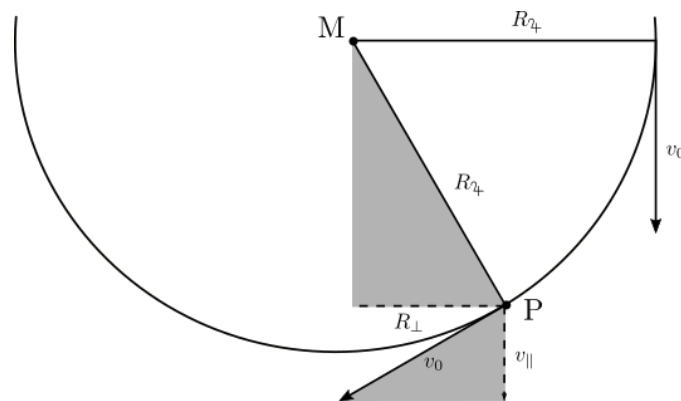


Abbildung 2: Der Äquator des Planeten Jupiter mit den Geschwindigkeitsvektoren an zwei Orten. v_{\parallel} und der rechte Vektor v_0 zeigen direkt zur Erde.

Die beiden getönten Dreiecke sind ähnlich. Deshalb gilt die Proportion

$$R_{\perp} : v_{\parallel} = R_{\gamma_{\perp}} : v_0 \quad (2)$$

für jede Lage des betrachteten Punktes P.

Die Proportionalität gilt für zwei beliebige Punkte P und Q auf dem Äquator. Statt R_{\perp} nehmen wir nun den senkrecht zur Beobachtungsrichtung projizierten Abstand d_{\perp} und v_{\parallel} wird zum Unterschied der beiden Geschwindigkeiten in den Punkten P und Q, der Differenz $\Delta v_{\parallel} = |v_{\parallel}(P) - v_{\parallel}(Q)|$. Siehe Abb. 3.

Es gilt dann eine erweiterte Form der Gleichung 2

$$d_{\perp} : \Delta v_{\parallel} = R_{\perp} : v_{\parallel} = R_{\gamma_{\perp}} : v_0 \quad (3)$$

und auch der Gleichung 1

$$T_{\gamma_{\perp}} = \frac{2\pi R_{\gamma_{\perp}}}{v_0} = \frac{2\pi d_{\perp}}{\Delta v_{\parallel}}. \quad (4)$$

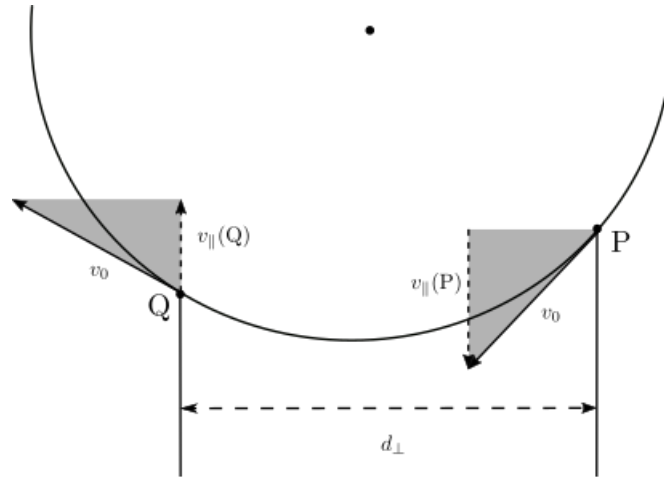


Abbildung 3: Projizierter Abstand zweier Orte auf dem Äquator und die dazugehörigen Geschwindigkeiten

Nebenbei haben wir damit bewiesen, dass die geneigten Linien nicht gekrümmt sind, sondern gerade.

Verschiedene Orte auf dem Äquator sind im Spektrum in verschiedenen Zeilen zu finden. Jede Zeile des Spektrums stellt das dopplerverschobene Spektrum eines Ortes auf dem Äquator dar. Die Abbildung 5 zeigt einen kleinen Ausschnitt der Spektren der Zeilen 375 und 456. Die Verschiebung der Absorptionslinie bei etwa 6122 \AA ist offensichtlich.

Mit der Dopplergleichung

$$\frac{\Delta v_{\parallel}}{c} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad (5)$$

erhalten wir leicht die Geschwindigkeit Δv_{\parallel} . Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, $\Delta \lambda$ die Verschiebung der Absorptionslinie und λ die mittlere Wellenlänge der beiden Linien.

Da wir reflektiertes Sonnenlicht beobachten, liefert die Rechnung nicht die Geschwindigkeit der Jupiteroberfläche sondern den doppelten Wert, denn der Weg von der Lichtquelle Sonne zum Beobachter auf der Erde über den Planeten wird auf der Strecke Sonne-Jupiter und nochmal auf der Strecke Erde-Jupiter verkürzt, bzw. verlängert.

Wir erhalten die Gleichung

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{\Delta \lambda}{2\lambda} \cdot c \quad (6)$$

1.2 Bestimmung des projizierten Abstands auf dem Äquator

Das Teleskop bildet den Planeten Jupiter auf den Spalt des Spektrographen ab. Der Spektrograph bildet den Spalt im Maßstab 1:1 auf die verwendete CCD ab und braucht hier nicht weiter berücksichtigt zu werden.

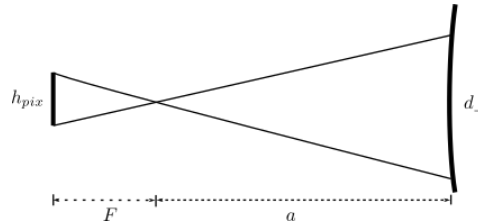


Abbildung 4: Abbildung des Jupiter auf den CCD-Chip mit einer Lochkamera der Brennweite F .

Die beiden Dreiecke sind wieder ähnlich, deshalb gilt

$$\frac{d_{\perp}}{a} = \frac{h_{pix}}{F} \quad (7)$$

und wir erhalten

$$d_{\perp} = \frac{a}{F} \cdot h_{pix} \quad (8)$$

Dabei sind a der Abstand des Jupiter von der Erde, h_{pix} der Abstand der beiden Zeilen aus dem Spektrum und F die Brennweite des Teleskops.

Jupiter ist einen Monat nach der Opposition etwa 10% weiter entfernt, als direkt in der Oppositionsstellung, also $a = 4,6$ AE.

Die effektive Brennweite des Teleskops ist in dieser Anordnung der ungenaueste Wert, da ich den Abstand der Shapleylinse vom Spalt des Spektrographen nicht auf den Millimeter genau messen kann. Dieser Abstand beträgt etwa 13cm. Die Brennweite der Sammellinse ist 50mm. Die Brennweite des Teleskops wird also um den Faktor $37/50$ auf $F = 4 \text{ m} \cdot \frac{37}{50}$ verkürzt.

Die quadratischen Pixel der verwendeten Atik 460 haben eine Seitenlänge von $4,54 \mu\text{m}$. Der Abstand der beiden Zeilenmitten auf dem Chip ist dann $h_{pix} = (456 - 375) \cdot 4,54 \mu\text{m}$.

2 Die Messung

Das Spektrum wurde am 10. Mai 2017 mit dem 16-Zoll Meade Teleskop der Volkssternwarte Neumarkt aufgenommen. Als Spektrograph wurde ein leicht veränderter LHiRes 3

verwendet. Der Spektrograph hat eine Abbildungslinse mit 4 cm Durchmesser und kann so etwas schnellere Beams von $F/7$ verarbeiten. Die Shapleylinse vor dem Spalt wurde schon erwähnt.

Zur Kalibration in der Wellenlänge diente die eingebaute Neonlampe. Im Spektralbereich von 6000 \AA bis 6300 \AA stehen sieben Linien zur Verfügung, die sich über die volle Höhe des Bildfeldes erstrecken. Damit kann die geometrische Verzerrung des Spaltbildes beim Littrowspektrographen beseitigt werden. Man erhält so ein 2-dimensionales Bild, das in jedem Punkt in der Wellenlänge kalibriert ist.

Weder Darks noch Flats wurden verwendet und auch keine heliozentrische Korrektur angebracht, da die absoluten Werte der Wellenlängen nicht interessieren.

Die Belichtungszeit für das Jupiterspektrum war 150 sec. Die Auflösung des Spektrographen mit dem $35 \mu\text{m}$ Spalt und einem Gitter mit 1800 Linien/mm beträgt $R \approx 8400$.

Aus dem in der Wellenlänge kalibrierten Spektrum wurden die Zeilen 375 und 456 geplottet. An die ausgewählte Absorptionslinie bei etwa 6122 \AA wurden jeweils eine Gaussfunktion gefittet, um die Position zu erhalten.

Ergebnis: $\lambda_{456} = 6121,633 \text{ \AA}$, $\lambda_{375} = 6122,242 \text{ \AA}$.

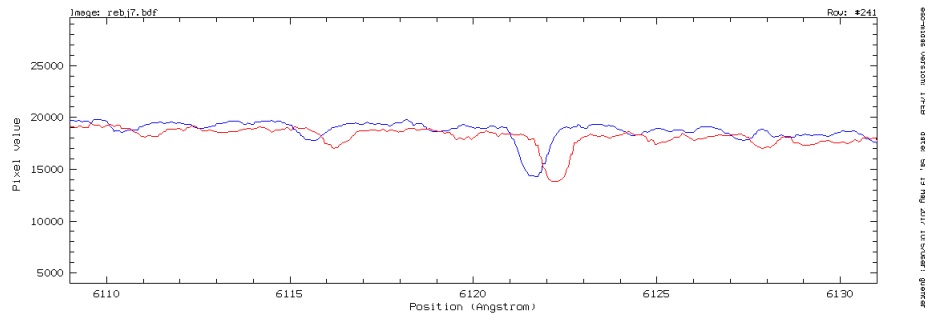


Abbildung 5: Plot der beiden Zeilen 375 und 465 im Spektrum von Jupiter.

Mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ liefert Gleichung 6 den Wert für die Geschwindigkeit Δv_{\parallel} .

$$\Delta v_{\parallel} = \quad (9)$$

Die Messwerte für die Länge des projizierten Äquatorbogens d_{\perp} sind oben bereits erwähnt:

$$a = 4,6 \cdot 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$h_{pix} = (456 - 375) \cdot 4,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$F = 4 \text{ m} \cdot \frac{37}{50}$$

Wir erhalten für den projizierten Abstand

$$d_{\perp} = \tag{10}$$

Mit d_{\perp} und Δv_{\parallel} in Gleichung 4 eingesetzt, erhalten wir als Rotationsdauer des Planeten Jupiter

$$T_{\text{J}} = \tag{11}$$

3 Fehlerbetrachtung

Die Geschwindigkeitsdifferenz Δv_{\parallel} ist recht gut zu messen. Die Wellenlängen der Referenzlinien werden auf 6 gültige Ziffern reproduziert. Bei der Lichtgeschwindigkeit habe ich $300\,000\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ genommen, statt $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ein Fehler von 0,07%. Darüber muss man sich keine Gedanken machen.

Die Länge der Strecke d_{\perp} hängt allerdings von der schlecht zu messenden Position der Shapleylinse ab. Die Genauigkeit ist sicher nicht besser als $\pm 0,5 \text{ cm}$. In die Formel geht der Wert $50 \text{ cm} - 13 \text{ cm}$ ein. Ich beziehe deshalb die Unsicherheit von 1 cm auf 37 cm . Das ist ein relativer Fehler von etwa 3%.

Die Brennweiten von Linse und Teleskop sind einem Katalog mit unbekannter Genauigkeit entnommen und gehen nicht in die Fehlerrechnung ein. Der Abstand Erde-Jupiter war zufällig gut geschätzt. Statt 4,6 AE zeigt CdC 4,608 AE an, ein Fehler von 0,2%. Ein Glückstreffer.

Gar nicht geprüft habe ich den Winkel φ , den die Rotationsachse von Jupiter mit der Sichtlinie einschließt. Er geht mit $1/\cos(90^{\circ} - \varphi)$ in das Ergebnis ein. Die Deklination der Erde in Jupiters Koordinatensystem nach <http://astroclub.tau.ac.il> war -3° . Ein Fehler von 0,3%.

Das Bild der Nachführkamera war gesättigt, so dass ich nicht abschätzen kann, wie gut ich den Äquator des Jupiter getroffen habe. Weder den Fehler beim Positionswinkel, noch beim Ort kann ich vernünftig abschätzen. Daran muss noch gearbeitet werden!

Die relativen Fehler habe ich einfach addiert. Die Summe ist 3,6%.

Wikipedia nennt als Rotationsperiode 9 h 55 min 30 s.

Resist!